LA ESCUELA COSTARRICENSE
REVISTA PEDAGOGICA MENSUAL
Organo de la Secretaría de Educación Pública
Director: MOISES VINCENZI

AÑO III | San José, C. R., 15 de octubre de 1935 | Nº 34

El por qué de estos apuntes

En la enseñanza de todas las ramas del conocimiento incluidas en el plan de la escuela, se nota falta de lógica, de racionalidad.

Diferentes veces hemos dedicado algunas consideraciones a la metodología de las distintas disciplinas que integran el programa escolar, encaminadas a adaptar su aprendizaje a los dictados de la razón más elemental. Cúmplenos, hoy, dedicar nuestra atención a la enseñanza del cálculo.

Bien sabemos que las actividades humanas se manifiestan febriles con tal de alcanzar el paralelo con los ímpetus de la ciencia, la industria y el arte, y es triste que la escuela ande rezagada en el cortejo de tanta inquietud. No hemos logrado el tipo de escuela humanista por excelencia, y menos el maestro que sienta la responsabilidad de su sacerdocio.

No ya en las tendencias educativas—pocas, por desgracia,—sino en los mismos ensayos instructivos, se presentan las rutinas ancestrales. La didáctica escolar es una sarta de pedanterías que conduce rectamente al fracaso; no se prepara al niño para que llegue a ser un hombre, sino para que posea unos conocimientos de utilidad práctica muy relativa.

Hay que rectificar. Hay que desterrar los métodos y procedimientos que anulan la personalidad y la iniciativa del alumno, y sustituirlos por actividades razonables que despierten, desde el primer momento, la atención del educando y que rindan el efecto máximo con el esfuerzo mínimo.

A esto se encamina este ensayo. No es una manifestación espontánea de un pensamiento: es el fruto sazonado de veinte años de experiencia personal.

La enseñanza del cálculo está en las condiciones más desgraciadas. En pleno siglo de las velocidades enseñamos a calcular como cien años atrás. La lógica más elemental está desterrada de su didáctica. En vez de hacer de esta disciplina algo intuitivo y racional, continuamos presentándola como esencialmente abstracta y ambigua. La gráfica, que debería ser empleada desde los primeros años de la infancia, es desdeñada y desterrada de las actividades escolares. No somos sólo nosotros, son Poincaré, Flamarión, Ferrol, Einstein, Echegaray, Torres Quevedo, etc., que claman por un viraje rápido y definitivo en la carrera loca emprendida.

Ojalá que este trabajito contribuya a despertar el interés de los educadores para comenzar a enmendar yerros que empiezan a ser imperdonables.

Figueras, (España), febrero de 1931.

Cálculo Abreviado

Primero.—Sumar

Siendo la suma la base de todo cálculo posterior, es importante insistir en la práctica de adicionar unidades de diferentes órdenes. A los alumnos se les hace pesado el repetir sumas considerando los sumandos como colectividades abstractas. Hay un sin fin de ejercicios que atraen, inmediatamente, la atención de los niños. El secreto del éxito está en la atención. A despertar, pues, esta potencia anímica, debe tender todo el trabajo del maestro. Los ejercicios que en forma de juegos pueden presentarse a los niños son los más indicados para lograr el fin deseado. Desgraciadamente es opinión bastante generalizada el que esta clase de juegos o ejercicios en matemáticas no consiguen otra cosa que hacer perder tiempo: tiempo perdido es el que se gasta en abstracciones tontas; en el aprendizaje de reglas ciegas; en teorías, y luego en demostraciones de propiedades generales sin consecuencias prácticas.

El maestro consciente nunca insistirá bastante en los ejercicios que a continuación siguen:

Antes de entrar de lleno en la práctica de los ejemplos que figuran más adelante, es preciso que el alumno sepa dar, con sólo ver la figura de los números, la suma de sus unidades. Para ello debe repasar todos los cálculos elementales que hubiera aprendido anteriormente y luego insistir mucho en los siguientes:

Ejercicio primero

Sumar 2 a cada uno de los números siguientes: (mentalmente y lo más rápido posible)

6, 9, 5, 4, 3, 8, 2, 7, 8, 5, 4, 9, 6.
Sumar 3, a cada uno de los siguientes:
2, 5, 9, 4, 6, 3, 9, 7, 6, 8, 9, 6, 3.
Id. 4, a los siguientes:
8, 9, 6, 7, 4, 6, 5, 3, 2, 8, 9, 6, 4.
Id. 5, a los siguientes:
3, 7, 8, 5, 4, 9, 6, 2, 3, 9, 6, 7, 8.
Id. 6, a los siguientes:
7, 8, 6, 9, 5, 4, 6, 2, 3, 9, 7, 5, 3.
Id. 7, a los siguientes:
8, 7, 9, 5, 6, 3, 4, 2, 8, 5, 3, 9, 7.
Id. 8, a los siguientes:
9, 6, 4, 7, 6, 9, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 7.
Id. 9, a los siguientes:
2, 6, 4, 3, 8, 6, 9, 7, 4, 7, 3, 4, 2.

Ejercicio segundo

Decir cuánto les falta a cada uno de los números siguientes, para valer 14:

3, 7, 5, 9, 7, 6, 2, 3, 5, 4, 8, 6, 9.
Id. para valer 13.
Id. para valer 12.
Id. para valer 11.
Id. para valer 10.

Ejercicio tercero

Dar los resultados de las siguientes sumas indicadas: (En esta forma: $7 + 8 = 15$)

7 más 8 igual a .
9 ” 6 ” ”
7 ” 5 ” ”
4 ” 9 ” ”
6 ” 7 ” ”
8 ” 5 ” ”
2 ” 6 ” ”
7 ” 9 ” ”
3 ” 7 ” ”
5 ” 6 ” ”
8 ” 9 ”
9 ” 6 ” ”

4 más 7 igual a
3 ” 8 ” ”
7 ” 5 ” ”
6 ” 8 ” ”
3 ” 8 ” ”
6 ” 9 ” ”
8 ” 3 ” ”
4 ” 5 ” ”
5 ” 7 ” ”
6 ” 8 ” ”
7 ” 3 ” ”

Ejercicio cuarto

Dar el resultado de las siguientes sustracciones indicadas:

$12 - 7 =$
$15 - 6 =$
$13 - 5 =$
$16 - 7 =$
$14 - 5 =$
$17 - 8 =$
$18 - 9 =$
$16 - 7 =$
$19 - 9 =$
$17 - 6 =$

$16 - 4 =$
$18 - 7 =$
$17 - 6 =$
$15 - 8 =$
$12 - 7 =$
$14 - 9 =$
$17 - 8 =$
$14 - 7 =$
$13 - 6 =$
$17 - 3 =$

Ejercicio quinto

Una vez el profesor vea que saben los niños hallar la suma de números de una sola cifra, pasará a los siguientes:

Si 6 más 7 igual a 13
60 más 70 igual a ¿cuánto?

Si 9 más 4 igual a 13
90 más 40 igual a ¿cuánto?

Si 7 más 8 igual a 15
70 más 80 igual a ¿cuánto?

Si 8 más 6 igual a 14
80 más 60 igual a ¿cuánto?

Si 4 más 6 igual a 10
40 más 60 igual a ¿cuanto?

Etc. etc.

Dense los resultados de las siguientes sumas indicadas:

60	más	80	igual	a	50	más	60	igual	a
50	"	40	"	"	90	"	40	"	"
80	"	90	"	"	80	"	70	"	"
60	"	60	"	"	60	"	50	"	"
50	"	40	"	"	90	"	60	"	"
30	"	70	"	"	80	"	50	"	"
20	"	90	"	"	50	"	70	"	"

Ejercicio sexto

Si 12 — 7 = 5	Si 11 — 5 = 6
120 — 70 = ?	110 — 50 = ?
Si 14 — 7 = 7	Si 17 — 9 = 8
140 — 70 = ?	170 — 90 = ?

Etc.

Dense los resultados de las sustracciones siguientes:

110 — 60 =	150 — 60 =
140 — 70 =	130 — 70 =
120 — 50 =	180 — 80 =
180 — 90 =	140 — 50 =
140 — 60 =	160 — 90 =
170 — 90 =	170 — 90 =
130 — 60 =	160 — 70 =
100 — 40 =	110 — 60 =
130 — 80 =	160 — 90 =
140 — 80 =	150 — 80 =

El maestro pondrá más ejercicios. Sólo damos una pauta.

Ejercicio séptimo

Para sumar 68 más 57, lo haremos así:
68 más 7 igual 75. 75 más 60 igual 135.

Para sumar 35 más 97, haremos así:
35 más 7 igual 42. 42 más 90 igual a 132.

Dense los resultados de las siguientes sumas:

45 + 78 =	75 + 25 =
72 + 86 =	85 + 15 =
66 + 69 =	86 + 12 =
44 + 77 =	55 + 78 =
56 + 89 =	69 + 92 =
64 + 83 =	77 + 19 =
67 + 95 =	78 + 65 =
56 + 67 =	89 + 17 =
48 + 68 =	87 + 25 =

Insístase en estos ejercicios hasta lograr seguridad y rapidez en el obrar.

Ejercicio octavo

Si 7 + 8 = 15	Si 6 + 7 = 13
y 70 + 80 = 150	y 60 + 70 = 130
700 + 800 = ?	600 + 700 = ?

Dense los resultados de las siguientes sumas:

200 + 600 =	600 + 800 =
600 + 800 =	900 + 700 =
700 + 500 =	600 + 300 =
400 + 900 =	500 + 600 =
200 + 800 =	300 + 700 =
700 + 600 =	500 + 900 =
500 + 800 =	600 + 400 =
700 + 500 =	800 + 900 =
600 + 600 =	300 + 500 =
400 + 900 =	800 + 800 =
300 + 700 =	700 + 500 =

Ejercicio noveno

Dense las diferencias siguientes:

(Igual que en la suma pensaremos:
115 — 60 = 55. 55 — 4 = 51.
Luego, 115 — 64 = 51.
135 — 60 = 75. 75 — 5 = 70.
Luego, 135 — 65 = 70.
Etc.)

115 — 64 =	185 — 75 =
135 — 65 =	189 — 62 =
137 — 75 =	136 — 80 =
175 — 25 =	140 — 65 =
168 — 46 =	135 — 65 =
100 — 68 =	172 — 52 =
100 — 64 =	148 — 66 =
102 — 98 =	155 — 79 =
155 — 45 =	144 — 60 =
130 — 75 =	90 — 35 =

Ejercicio décimo

Es muy recomendable el siguiente, conocido con el nombre de cuadro de Jackson:

5	6	7	8	4	2	8	6	5
9								7
5								6
4								4
8								8
2								9
								6
6	7	4	8	7	2	2	4	

El maestro escribirá este cuadro u otro parecido en el encerado. y haciendo colocar a los niños frente a él, hará que cada uno vaya sumando los números del cuadro del modo siguiente: el primero empezará por el 5 del vértice superior izquierdo e irá dando la vuelta, sumando en esta forma: 5. 11. 18. 26. etc. Resultados que provienen de sumar el 5 con el 6; el 7 con el resultado del 5 más 6; el 8 con el resultado anterior etc., hasta llegar al número de partida. El maestro anotará el tiempo empleado y el número de equivocaciones. El segundo niño de la sección hará lo mismo; pero empezando por el número siguiente, el 6. Una vez que lo hayan hecho todos —cada uno irá empezando por un número más adelantado —el maestro colocará la sección por orden, según el menor tiempo empleado y el menor número de equivocaciones.

Como complemento del resultado obtenido con el cuadro de Jackson, deben practicar los niños el siguiente:

Se escriben en el encerado varios números de una sola cifra en fila o en columna, y deben sumarlos, tal como lo han hecho en el ejercicio anterior; pero, agrupando números que den 10. Véase el siguiente ejemplo:

4, 6, 7, 8, 5, 3, 7, 5, 2, 6, 4, 8, 3, 2,
6, 4, 8, 9, 2, 1, 4, 5, 1, 3, 7, 5, 8, 2.

Como al sumar los términos del cuadro anterior, diremos: 10, 17, 25, 30, 40, 45, 47, 57, 65, 70 etc.

El niño debe acostumbrarse a ver el 10 en los números siguientes: 4—6, 3—7, 6—4, 8—2, etc.

Repítase este ejercicio varias veces hasta que se consiga que los alumnos sepan distinguir el 10, aunque entre los números que lo integran haya otros.

$$\underbrace{4,\ \rlap{$\overbrace{}^{10}$}2,\ 6,}_{10}\ 3,\ 5,\ 7,\ 4,\ \underbrace{1,\ 8,\ 9}_{10}$$

Suma: $10 + 10 + 7 + 4 + 10 + 8 =$
$30 + 7 + 4 + 8 = 49.$

Ejercicio undécimo:

Para desarrollar la inicitiva, y como práctica complementaria de la que está sintetizada en los ejercicios precedentes, es bueno hacer resolver al niño *cuadros mágicos.*

Son éstos unos cuadrados divididos en partes iguales y el ejercicio consiste en, dados los números de la primera columna o de la primera fila, disponer estos números de tal manera que sumados horizontal, vertical y diagonalmente, den siempre el mismo resultado. O bien, dados los términos de la primera columna o fila, hallar otros que sumados con los primeros, horizontal, vertical y diagonalmente den de suma el mismo número.

Ejemplos:

		9
		6
		15

Dados los números 9, 6 y 15, combinarlos de tal manera dentro del cuadro, que sumados horizontal, vertical y diagonalmente, den siempre la misma suma.

Hacer lo mismo con los números del siguiente:

		20
		15
		4

Id. con el siguiente cuadro, pero ahora completándolo con números distintos de los dados:

		12
		8
		14

Combínense los números del siguiente cuadro de cuarta clase:

			12
			10
			14
			8

Complétese, finalmente, este otro cuadro de cuarta clase, pero con números distintos de los que se dan:

			8
			12
			4
			16

SUMAR

Prácticas aditivas:

35 26 47 36 44 30 76 38 ——— 332	En vez de sumar separadamente las unidades y las decenas, lo haremos conjuntamente según lo aprendido en los ejercicios primeros. Diremos: 35 más 6 del 26 = 41. 41 más 20 del 26 = 61. 61 más 7 del 47 = 68. Etc.

Otro ejemplo:

25 46 76 98 36 45 25 68 36 ——— 455	Como en ei caso primero diremos: 25, 31, 71, 77, 147, 155, 245, 251, 281, 286, 326. 331, 361. Es decir, no desdoblar, sino sumar conjuntamente decenas y unidades, tal como hemos indicado. Así: 25 + 6 = 31. 31 + 40 = 71. 71 + 6 = 77. 77 + 70 = 147. Etc.

Un ejemplo con centenas:

2	3	5
4	7	6
2	8	3
4	3	5
2	7	8
4	3	5
2	4	5
23		5
	3	7
23	8	7

ANALISIS

Separaremos el grupo centenas-decenas, de las unidades y procederemos aisladamente, así:

Sumas de centenas-decenas:
24, 27, 67, 74, 94. 97, 137, 145, 165, 172, 212, 215, 235. Final = 235.
Suma de unidades = 5, 10, 18, 23, 26, 52, 37.

Suma total = 235
37
2387

Otro ejemplo:

23	5
47	6
89	4
62	8
54	9
87	5
24	4

Suma de centenas y decenas: 24, 31, 111, 115, 165, 167, 227, 236, 316, 323, 363, 366, 386.

Suma de unidades:
5, 11, 15, 23, 32, 37, 41.

Total = 386
41
3901

Otro ejemplo con millares:

ANALISIS

23	45
36	78
44	23
98	76
47	48
36	76

Haremos dos grupos: el de millares-centenas y el de decenas-unidades.

Suma de los sumandos del primer grupo: 36, 43, 83, 91, etc.

Suma de los sumandos del segundo grupo: 76, 84, 124, 130, 200, etc.

Suma total: la 1ª más la 2ª.

Otro ejemplo:

23	45
37	68
45	64
28	92
33	46
38	96
46	34
250	
4	45
254	45

Sumas de millares-centenas: 46, 54, 84, 87, 117, 125, 145, 150, 190, 197, 227, 230, 25C.

Suma de decenas-unidades: 45, 53, 113, 117, 177, 179, 269, 275, 315, 321, 411, 415, 445.

EJERCICIOS

Sumar las cantidades siguientes por el procedimiento indicado:

25, 36, 44, 58, 95, 87, 38 y 65
24, 45, 37, 89, 98, 77, 86 y 66
23, 43, 46, 75, 97, 56, 63 y 23
65, 45, 87, 78, 67, 73, 72 y 35
98, 57, 47, 45, 36, 74, 82 y 96

654, 876, 253, 378, 987 y 236
604, 897, 765, 445, 876 y 445
263, 987, 765, 345, 654 y 998
335, 765, 879, 445, 876 y 987
257, 785, 876, 456, 778 y 906

2753, 9875, 4653, 8765, 8765 y 2054
3462, 1263, 4198, 4761, 9604 y 3118
9817, 9075, 7750, 9734, 8765 y 9116
4587, 7654, 1234, 6543, 9816 y 7891
5437, 1876, 6589, 9812, 5437 y 8165

MULTIPLICACION

Es en esta operación en donde más visible se muestra la eficacia de adoptar otras propiedades de los números para operar con ellos en vez de las que se toman por base para dar las reglas anticuadas y largas de realizar.

Primer caso

Factores de dos cifras y que el producto de las unidades no contenga decenas:

ANALISIS

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ejemplo:} & \ 8\ 1 \\ & \underline{\times\ 5\ 2} \\ \text{igual a} & 4212\end{array}\right\}$$

Suma de productos cruzados = 2 por 8 más 5 por 1 = 16 más 5 = 21. Escribimos el 21 como centro del producto. Busquemos las cifras extremas multiplicando el 2 por 1 y el 5 por 8. 2 por 1 = 1. Este 2 lo escribimos a la derecha como cifra de unidades. 5 por 8 = 40 centenas, que con las 2 del 21 dan 42. Escribimos, pues, el 4 a la izquierda y tendremos finalmente el producto que es 4212.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Sea} & \ 6\ 2 \\ & \underline{\times\ 3\ 1}\end{array}\right\}$$

1 por 6 más 3 por 2 = 12
1 por 2 = 2
3 por 6 = 18
Producto = 1922

En este caso, como que las 18 centenas se suman al 1 del 12, dan 19 y el producto es el anterior.

$$\begin{array}{ll}\text{Sea:} & 5\ 7 \\ & \underline{\times\ 2\ 1}\end{array}$$

$5 \times 1 + 2 \times 7 = 19$
$1 \times 7 = 7$
Tenemos ya 197
$2 \times 5 = 10$

Producto = *1197*

$$\text{Sea} \quad \begin{array}{r} 9\ 2 \\ \underline{\times\ 3\ 4} \end{array} \left\} \begin{array}{l} \text{4 por 9 más 3 por 2 = 42} \\ \text{4 por 2 = 8} \\ \text{Tenemos 428} \\ \text{3 por 9 = 27} \end{array} \right.$$

Final = *3128*

Segundo caso

Multiplicando de tres cifras y multiplicador de dos, siendo unidades el producto de unidades.

Ejemplo: 1 2 4
$\times$ 3 2

Análisis

Consideremos el multiplicando de dos cifras separándolo en 12 y 4 y como antes;

$2 \times 12 +$
$3 \times 4 = 36$
$2 \times 4 = 8.$
Tenemos = 368
$3 \times 12 = 36$ centenas, que con las 3 del 368, dan 39.

Final: *3968*

Sea: 2 4 3		2 por 24 más 5 por 3 = 63
x 5 2		2 por 3 = 6
		Tenemos 636
		5 por 24 = 120
		Final = *12636*

Sea: 3 6 2		4 por 36 más 5 por 2 = 144 más 10 = 154
x 5 4		2 por 4 = 8
		Tenemos 1548
		5 por 36 = 180
		Final: *19548*

Tercer caso

Cuando los factores son de dos cifras y el producto de unidades da decenas.

Ejemplo:

```
  7 4
x 3 6
```

Práctica

Igual que en el primer caso; pero teniendo cuidado de añadir a las decenas del producto las que proceden de multiplicar las unidades.

ANALISIS

6 por 7 más 3 por 4 = 54

6 por 4 = 24 unidades

Las 2 decenas del 24 las sumamos a las 4 del 54 y tenemos 56 y 3 x 7 = 21

Final: *2664*

Sea: 7 8	7 x 7 más 9 x 8 = 121
x 9 7	7 x 8 = 56
	121 más 5 = 126

Recuérdese que 121 son decenas y que sumadas a las 5 del 56 dan 126.

9 x 7 = 63

Final: *7566*

Cuarto caso

Igual al anterior; pero el multiplicando de tres cifras.

Descomponemos el 287 en 28 y 7

$$\begin{array}{r} 2\ 8\ 7 \\ \times\quad 4\ 3 \\ \hline \end{array} \Bigg\}$$

Ejemplo:

Ahora: 3 x 7 = 21

3 x 28 + 4 x 7 = 112

114 con el 1 = 1141

4 x 28 = ...112

Total 12341

Hay que advertir que es preferible resolver estos casos según el procedimiento que señalaremos al tratar del caso en que el multiplicando tiene varias cifras y el multiplicador sólo dos.

Caso especial

Cuando hay una cifra repetida:

Explicación

$$\begin{array}{r} 7\ 3 \\ \times\ 4\ 3 \\ \hline \end{array} \Bigg\}$$

3 x 3 = 9

3 x 7 + 4 x 3 = 3 (7 + 4) = 3.11 = 33

4 x 7 = 28

Total = 3139

Final: *3139*

Otro ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 6\ 3 \\ \times\ \ 2\ 2 \end{array}\right\}$$

Final: *1386*

Otro:
$$\left.\begin{array}{r} 6\ 6 \\ \times\ \ 6\ 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6 \times 6 = 36 \\ 2 \times 6 \times 6 = 72 \\ 6 \times 6 = 36 \end{array}$$

Luego $66^2 = 4356$

Final: *4356*

Otro:
$$\left.\begin{array}{r} 7\ 5 \\ \times\ \ 7\ 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5 \times 5 = 25 \\ 2 \times 7 \times 5 = 70 \\ 7 \times 7 = 49 \end{array}$$

Producto: *5625*

Consecuencia: $75 \times 75 = 75^2 = 5625$

¿Qué hemos hecho para hallar este cuadrado? Hemos obtenido $5 \times 5 = 25 =$ cuadrado de la cifra de las unidades.

$7 \times 7 = 49. =$ cuadrado de las cifras de las decenas.

$2 \times 7 \times 5 = 70 =$ doble de la cifra de unidades por la de decenas.

Otro caso:

Otro:
$$\left.\begin{array}{r} 1\ 7 \\ \times\ \ 1\ 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1 \times 9) \text{ más } (1 \times 7) = \\ = 1\ (9 \text{ más } 7) = 16 \\ 9 \times 7 = 63 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}$$

Total: *323*

Caso especial

Cuando los factores se acercan a 100. En este caso hacemos uso del complemento aritmético:

Sean	9 3	Complemento de 93 = 7
	x 8 6	Idem de 86 = 14
		7 x 14 = 98
		7 más 14 = 21
		100 — 21 = 79

Producto: *7998*

¿Qué hemos hecho? Hemos hallado el complemento de cada factor y el producto de estos complementos. Hemos sumado luego los complementos y esta suma la hemos restado de 100.

Otro ejemplo:	8 9	Comp. 11
	x 9 5	Id. 5
		55
		11 más 5 = 16
		100 − 16 = 84

Producto: *8455*

Véase que si en vez de hacerlo como dejamos indicado sumamos los dos factores 89 más 95 nos da 184, de cuyo número, restando la unidad complementaria que es 100, queda 84.

Veamos de demostrar el procedimiento que explicamos:

Sean los números que se tratan de multiplicar A y B y sean a y b los complementos respectivos:

Se tendrá $A + a = 100$
$B + b = 100$

O bien $A = 100 - a$
$B = 100 - b$

Multiplicando $A \times B = (100 - a)(100 - b) = 100.100 - 100.b - 100.a + ab.$

Sacando 100 factor común se tiene:

$100(100 - b - a) + ab = 100(100 - (a + b) + ab.$

Lo que nos da la razón del procedimiento señalado, es decir: el producto de los complementos se suma a la diferencia entre 100 y la suma de estos complementos, pero considerando dos ceros a la derecha de esta diferencia por venir multiplicada por 100.

Otro ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 97 \\ \times\ 89 \end{array}\right\}$

comp. 3
id. 11
33
3 más 11 = 14
100 - 14 = 86 Prod. = *8633*

Caso especial

95 × 95. Comp. 5
5 por 5 = 25
5 más 5 = 10
100 — 10 = 90
Cuadrado de 95 = 9025

Véase la rapidez con que se obtiene el cuadrado de un número que se acerca a 100.

Otro ejemplo:

Otro ejemplo: 98 comp. 2
x 98 » 2
96 04
Cuadrado de 98 = 9604

Si el producto de complementos da unidades superiores, se obra así:

6 5	com.	35
x 9 7	»	3
6 2 + 1		1.05

Explicación: $35 \times 3 = 105$

la centena 1, la sumo al 2 del 62. Tengo, finalmente, 6305.

También podríamos obtener este mismo resultado de otra manera:

$35 + 3 = 38$.
$100 - 38 = 62$. $62 + 1$ del $105 = 63$.
Total, 6305.

Otro ejemplo:

7 5	comp.	25
x 9 6	»	4
7 1 + 1 =		100

Total: 7200

Cuando el multiplicando y el multiplicador son números de más de dos cifras.

Ejemplo: 5 4 2
$\times$ 4 3 1

Veamos lo que debemos hacer:

1º—$1 \times 2 = 2$.
2º—$4 \times 1 + 2 \times 3 = 10$.
3º—$1 \times 5 + 4 \times 2 + 3 \times 4 + 1$ (del 10) $= 26$.
4º—$3 \times 5 + 4 \times 4 + 2$ (del 26) $= 15 + 16 + 2 = 33$
5º—$4 \times 5 = 20 + 3$ (del 13) $= 23$.
Producto final $= 233602$.

Explicación

$$\begin{array}{r} 5\ 4\ 2 \\ \times 4\ 3\ 1 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

$1 \times 2 = 2$
1×4 más $3 \times 2 = 10$
(El cero lo escribimos a la izquierda del 2)
$1 \times 5 + 4 \times 2 + 3 \times 4 + 1$ (del 10) $= 26$
(El 6 lo escribimos a la izquierda del 0)
$3 \times 5 + 4 \times 4 + 2$ (del 26) $= 33$
(Escribimos el 3 a la izquierda del 6)
$4 \times 5 = 20 + 3$ (del 33) $= 23$ que finalmente escribimos a la izquierda.

Producto total: 233602

Otro ejemplo:

$$\begin{array}{r} 4\ 3\ 2 \\ \times\quad 5\ 1\ 4 \\ \hline \end{array}$$

$4 \times 2 = 8.$
$4 \times 3 + 1 \times 2 = 14.$
$4 \times 4 + 5 \times 2 + 1 \times 3 = 29 + (1$ del $14) = 30.$
$1 \times 4 + 5 \times 3 = 19 + 3$ (del 30) $= 22.$
$5 \times 4 = 20 + 2$ (del 22) $= 22.$
Total $= 222048.$

Factores de cuatro cifras:

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 5\ 4 \\ \times 6\ 2\ 3\ 1 \\ \hline \end{array}$$

proceso

$4 \times 1 = 4$
$1 \times 5 + 3 \times 4 = 17$
$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 = 26 + 1$ (del 17) $= 27$
$1 \times 2 + 6 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 3 = 45.$ $45 + 2$ (del 27) $= 47$
$3 \times 2 + 6 \times 5 + 2 \times 3 = 42$
$42 + 4$ (del 47) $= 46$
$2 \times 2 + 6 \times 3 = 22.$ $22 + 4$ (del 46) $= 26$
$2 \times 6 + 2$ (del 26) $= 14$

Producto total: 14667774.

Caso especial:

Multiplicador de menos cifras que el multiplicando.

Ejemplo: 2 4 5 2
$\times$ 2 3

Diremos: $3 \times 2 = 6$.
$3 \times 5 + 2 \times 2 = 19$.
$3 \times 4 + 2 \times 5 = 22$. $22 + 1$ (del 19) $= 23$.
$3 \times 2 + 2 \times 4 = 14$. $14 + 2$ (del 23) $= 16$.
$2 \times 2 = 4$. $4 + 1$ (del 16) $= 5$.

Total: 56396.

Otro ejemplo: 3 6 5 2 4
$\times$ 3 5

5 x 4 = ...	2 0
5 x 2 más 3 x 4 = 22. más 2 del 20 =	2 4
5 x 5 más 3 x 2 = 31. más 2 =	3 3
5 x 6 más 3 x 5 = 45. más 3 =	4 8
5 x 4 más 3 x 6 = 33. más 4 =	3 7
3 x 3 más 3	1 2

Total: 1278340

Cuando los factos se acercan a 1000 se procede como en el caso de los complementos de 100.

Ejemplo:	9 7 8	comp.	2 2
	9 8 9	»	1 1
	9 6 7		2 4 2

Total: 9 6 7 2 4 2

Otro ejemplo:

9 8 5	comp.	1 5
9 9 8	»	2
9 8 3		3 0

Producto: 9 8 3 3 0

Cuando los factores son de cuatro cifras:

9 8 7 4	comp.	1 2 6
9 9 8 8	»	1 1
9 8 6 2		1 5 1 2

Total: 9 8 6 2 1 5 1 2

Caso de cinco cifras:

9 9 8 7 4	com.	1 2 6
9 8 5 4 5	»	1 4 5 5
9 8 4 1 9		1 8 3 3 3 0

Total: 9 8 4 1 9 1 8 3 3 3 0

Cuando los dos factores se acercan a una misma centena se opera como en el caso siguiente:

1 7 8	comp.	a 200 = 2 2
1 8 5	»	200 = 1 5
1 6 3		3 3 0

200 x 1 6 3 = 3 2 6 0 0
3 3 0
3 2 9 3 0

Nota: el 163 procede de restar de la suma de 178 y 185, 200.

Método ordinario:

```
    1 7 3
    1 8 5
    -----
    8 9 0
  1 4 2 4
  1 7 8
---------
3 2 9 3 0
```

Ventajas: 1ª.—Menos cálculos.

2ª.—Más seguridad, pues a menos cálculos menos probabilidad de equivocarse.

3ª.—Más rapidez.

Otro ejemplo a base de 600

```
  5 5 5....   com.  4 5
x 5 8 9....    »    1 1
-------            -----
  5 4 4             4 9 5

6 0 0 x 5 4 4 = 3 2 6 4 0 0
     más              4 9 5
                -----------
                3 2 6 8 9 5
```

Cuadrados: 8 9 2 x 8 9 2. Com. 8

```
                              x 8
                              ---
                               64
9 0 0 x 8 8 4 = 7 9 5 6 0 0
     más                6 4
                -----------
                7 9 5 6 6 4
```

Caso del multiplicando de varias cifras y el multiplicador de tres.

```
Ejemplo: 4 2 8 6 4 7
         ×     3 2 4
         -----------
```

Procedimiento:

4 x 7 =	2 (8
4 x 4 más 2 x 7 = 30. 30 más 2 =	3 (2
4 x 6 más 3 x 7 más 2 x 4 = 53. 53 más 3 =	5 (6
4 x 8 más 3 x 4 más 2 x 6 = 56. 56 más 5 =	6 (1
4 x 2 más 3 x 6 más 2 x 8 = 42. 42 más 6 =	4 (8
4 x 4 más 3 x 8 más 2 x 2 = 44. 44 más 4 =	4 (8
2 x 4 más 3 x 2 = 14. 14 más 4 =	1 (8
3 x 4 = 12. 12 más 1 =	1 (3

Total: 138881628

División

Fijémonos en lo que hemos hecho al multiplicar y operemos inversamente para dividir.

Sea un producto de dos factores de dos cifras cada uno:

$$\left.\begin{array}{r} 4\ 5 \\ \times\ 3\ 2 \end{array}\right\} \text{ hemos obtenido los productos parciales}$$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad 2 \times 5 \\ \quad 2 \times 4 + 3 \times 5 \\ 3 \times 4 \\ \hline \text{Total} = 1\ 4\ 4\ 0 \end{array}$$

Pues bien; cojamos el 1440 y dividámoslo por 45.

$$\frac{1\ 4\ 4\ 0}{4\ 5}$$

Veamos lo que hacemos:

Dividamos 14 por 4 y obtendremos 3.

Multupliquemos 3×4 y tendremos el primer producto parcial (el último de la multiplicación). Restemos del dividendo el 12, es decir, restemos 12 de 14 (del 1440) y obtendremos 240. En este número tienen que estar contenidos los productos: $2 \times 4 + 3 \times 5 + 2 \times 5$. Luego restemos de 24, primeras cifras de la derecha del número 240, el producto $3 \times 5 = 15$. $24 - 15 = 9$.

9 ha de contener el producto 2×4. Dividamos, pues, y tendremos: $9 : 4 = 2$.

Restemos de 9 el producto $2 \times 4 = 8$ y tendremos 1, que con el 0 del 240 nos da 10 y 10 ha de contener el producto 2×5 o ser igual a él en el caso de que la división sea exacta. En efecto: $2 \times 5 = 10$. $10 - 10 = 0$.

Otro ejemplo:

$$\frac{4\ 3\ 2\ 5}{5\ 2}$$

Proceso: si las dos cifras del cociente son a y b, es evidente que en 4 3 2 5 estará comprendida la suma de los productos siguiente:

$$\begin{array}{r} 5\ 2 \\ \times \quad a\ b \\ \hline 5a + (2a + 5b) + 2b \end{array}$$

Dividamos, pues, 43 por 5, para encontrar a.
$43 : 5 = 8$. Luego, $a = 8$.

Restemos de 43 el primer producto $5a = 5 \times 8 = 40$ y tendremos 3 de resto, que con el 2 (cifra siguiente del dividendo), hace 32.

En 32 ha de estar contenida la suma de los segundos productos parciales $2a + 5b$. Restemos, pues, del 32 el producto conocido para que quede el desconocido. $32 - 2a = 32 - 2 \times 8 = 16$. 16 ha de contener el otro de los segundos productos; 5b. Luego, $16 : 5 = b = 3$.

Multiplicando el cociente por el divisor y restando el producto del dividendo, nos dará 1 de resto, que juntado al 5 (última cifra del dividendo), hace 15, cuyo número ha de contener forzosamente el último producto $2b = 2 \times 3 = 6$.

Luego $15 - 6 = 9$
Resto $= 9$.
Así, pues, $4325 : 52 = 83$. Resto, 9.
Prueba:

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times\ 52 \\ \hline 4316 + 9 = 4325. \end{array}$$

Otro ejemplo:

$$\frac{2524}{63} =$$

$25 : 6 = 4$; $4 \times 6 = 24$; $25 - 24 = 1$, que con el 2, 12.
$4 \times 3 = 12$; $12 - 12 = 0$; $0 : 0 = 0$.

Luego, el cociente es 40 y el resto 0, que con el 4 (cifra final) $= 4$.

Prueba:

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times\ 40 \\ \hline 2520 + 4 = 2524 \end{array}$$

Caso del dividendo de varias cifras y el divisor de dos

$$\begin{array}{r} 4235246 \\ 57 \\ \hline \end{array}$$

Proceso:

$42 : 5 = 8$; $5 \times 8 = 40$; $42 - 40 = 2$; que con el 3 da 23.

$8 \times 7 = 56$. *Alto*, vemos que 56 no puede restarse de 23, luego, el 8 es mayor que la verdadera cifra. Volvamos: $42 : 5 = 7$; $5 \times 7 = 35$; $42 - 35 = 7$ que con el 3 da 73.

$7 \times 7 = 49$; $73 - 49 = 24$; $24 : 5 = 4$; $4 \times 5 = 20$; $24 - 20 = 4$, que con el 5 da 45.

$4 \times 7 = 28$; $45 - 28 = 17$; $17 : 5 = 3$; $5 \times 3 = 15$; $17 - 15 = 2$ que con el 2 da 22.

$7 \times 3 = 21$; $22 - 21 = 1$; $1 : 5 = 0$; $5 \times 0 = 0$; $1 - 0 = 1$ que con el 4 da 14; $14 : 5 = 2$; $2 \times 5 = 10$; $14 - 10 = 4$ que con el $6 = 46$. $2 \times 7 = 14$; $46 - 14 = 32$.

Cociente: 7 4 3 0 2
Resto: 3 2

$$
\begin{array}{r}
\text{Prueba:}\quad 7\ 4\ 3\ 0\ 2 \\
\times \quad\ 5\ 7 \\
\hline
\end{array}
$$

$4\ 2\ 3\ 5\ 2\ 1\ 4 + 3\ 2 = 4\ 2\ 3\ 5\ 2\ 4\ 6$.

Caso de cociente y divisor de tres cifras:

Procedamos, como antes de la multiplicación. Sea el ejemplo siguiente:

$$
\begin{array}{r}
3\ 5\ 2 \\
\times\ 7\ 4\ 5 \\
\hline
\end{array}
$$

Productos: $7 \times 3 + (7 \times 5 + 4 \times 3) + (7 \times 2 + 5 \times 3 + 4 \times 5) + (4 \times 2 + 5 \times 5) + (5 \times 2)$.

Producto total = 262240.

$$
\begin{array}{l}
\text{Divdamos}\quad 2\ 6\ 2\ 2\ 4\ 0 \\
\hline
\qquad\qquad\quad 7\ 4\ 5
\end{array}
$$

26 ha de contener el producto 7×3. Dividamos pues 26 por 7 y nos dará el 3. Restemos de 26 el producto 7×3

y quedará 5 que con el 2 del dividendo da 52. 52 ha de contener la suma de los productos $7 \times 5 + 4 \times 3$. Luego restando de este número 4×3, quedará un número que contendrá el 7×5. Hagámoslo: $52 - 3 \times 4 = 52 - 12 = 40$. 40 contiene el $7 \times 5 = 35$ y dividiéndolo por 7 dará 5. (Segunda cifra del cociente).

Restemos de 40 el producto $7 \times 5 = 35$ y queda 5 que con el 2 del dividendo da 52. 52 ha de contener la suma de los productos $7 \times 2 + 5 \times 3 + 4 \times 5$. Luego, si restamos de él los dos productos 5×4 y el 3×5, quedará un número que contendrá el 7×2. Hagámoslo: $52 - (5 \times 4 + 3 \times 5) = 52 - 35 = 17$. 17 ha de contener el producto 7×2. Luego $17 : 7 = 2$. Restemos de 17, $7 \times 2 = 14$ y queda 3 que con el 4 del dividendo da 34. Este número ha de contener la suma de los productos, $4 \times 2 + 5 \times 5$. Restemos de él esta suma y queda: $34 - (8 + 25) = 1$ que con el 0 del dividendo da 10. 10 ha de contener el último producto, 2×5. Restemos éste de aquél y da 0. Luego, la división es exacta siendo el cociente 352.

Otro ejemplo:

$$\frac{4\ 2\ 3\ 5\ 2\ 3}{5\ 4\ 7}$$

Llamemos a, b, c, a las tres cifras del cociente.

42, dividido por 5 nos ha de dar a. Hallémoslo: $42 : 5 = 8$. Luego, $a = 8$.

$42 - 5 \times 8 = 2$ que con el 3 da 23. 23 ha de contener a $(5 . b + 4 . 8)$; pero vemos que no es así, por lo que, la cifra 8 es mayor que la verdadera. Luego, $a = 7$.

$42 - 5 \times 7 = 7$ que con el 3 da 73.

73 ha de contener los productos $(7 \cdot 4 + 5 \cdot b)$. Restando del 73 el 7×4, quedará un número que contendrá el $5 \times b$. Restemos: $73 - 28 = 45$ que contiene al $5 \cdot b$. Luego, $45 : 5 = b = 7$.

$45 - 5 \times 7 = 10$ que con el 5 da 105. Tenemos, pues, ya, dos cifras del cociente:

El 105 ha de contener a $(7 \times 7 + 7 \times 4 + 5 \times c)$.

Restemos de 105 el $7 \times 7 + 7 \times 4$ o sea 77.

$105 - 77 = 28$ que ha de contener a $5 \cdot c$. De donde, $28 : 5 = c = 4$.

$28 - 5 \times 4 = 8$ que con el 2 da 82.

Tenemos ya las tres cifras del cociente. El resto 82 ha de contener a $(7 \times 7 + 4 \times 4) = 65$.

Restemos $82 - 65 = 17$ que con el 3 hace 173 que contiene el último producto $4 \times 7 = 28$. Resultando $173 - 28 = 145$ que es el resto de la división.

Luego: cociente $= 774$
resto $= 145$

Prueba:

$$\begin{array}{r} 547 \\ \times\ 774 \\ \hline 423378 \\ +\ 145 \\ \hline 423523 \end{array}$$

Otro ejemplo:

$$\begin{array}{r} 124675 \\ \hline 472 \end{array}$$

$12 : 4 = 2; 2 \times 4 = 8.$
$12 - 8 = 4$ que con el 4, hace 44.
$44 - 2 \times 7 = 30.$
$30 : 4 = 6.$
$30 - 4 \times 6 = 6$ que con el 6 hace 66.
$66 - (2 \times 2 + 6 \times 7) = 66 - 46 = 20.$
$20 : 4 = 4.$
$20 - 4 \times 4 = 4$, que con el 7 hace 47.
$47 - (6 \times 2 + 4 \times 7) = 7$ que con el 5 da 75.
$75 - 4 \times 2 = 67.$

Luego: cociente = 264
resto = 67

Prueba:
$$\begin{array}{r} 472 \\ \times\ 264 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 124608 \\ +\quad 67 \\ \hline 124675 \end{array}$$

Números cualesquiera:

$$\begin{array}{l} 4\ 3\ 2\ 5\ 0\ 2\ 3\ 4 \\ \hline \quad 7\ 2\ 9 \end{array}$$

$43 : 7 = 5$
$43 - 35 = 8$ que con el 2 hace 82.
$82 - 5 \times 2 = 72.$

$72 : 7 = 9.$

$72 - 63 = 9$ que con el 5 hace 95.

$95 - 5 \times 9 + 2 \times 9 = 95 - 63 = 32.$

$32 : 7 = 3.$

$32 - 21 = 11$ que con el 0, hace 110.

$110 - 9 \times 9 + 3 \times 2 = 23.$

$23 : 7 = 2.$

$23 - 14 = 9$ que con el 2 hace 92.

$92 - 3 \times 9 + 2 \times 2 = 61.$

$61 : 7 = 8.$

$61 - 56 = 5$ que con el 3, 53.

$53 - 2 \times 9 + 2 \times 8 = 19$ que con el 4 hace 194.

$194 - 72 = 122.$

Así, pues: cociente $= 59328$

resto $= 122$

Prueba:

$$\begin{array}{r} 59328 \\ 729 \\ \hline 43250112 \\ +\qquad 122 \\ \hline 43250234 \end{array}$$

MANERA DE HACER LA PRUEBA DE LAS CUATRO OPERACIONES.

Sea la suma siguiente:

$$\begin{array}{r} 43 \\ 24 \\ 67 \\ \hline = 134 \end{array}$$

Dividamos cada sumando por un mismo divisor, 9 por ejemplo y guardemos los restos.

Resto de dividir	43 por 9	=	7
" " "	24 por 9	=	6
" " "	67 por 9	=	4
Suma de restos			17
Resto de dividir	17 por 9	=	8
Resto de la suma		=	8

Luego, la suma de los restos que se obtienen de dividir cada sumando por 9 es igual al resto de la suma por 9.

REGLA: se suman las cifras de cada sumando descartando los nueves que se van obteniendo y anotando el resto último.

Se suman luego éstos y esta suma ha de ser igual al resto que obtenemos por el mismo procedimiento de la suma total.

Sea la diferencia siguiente:

$$\begin{array}{r} 42624 \\ -\ 37452 \\ \hline = 5172 \end{array}$$

Dividamos el minuendo por 9 y anotemos el resto, procediendo así: $4 + 2 = 6$. $6 + 6 = 12$. $12 - 9 = 3$. $3 + 2 = 5$. $5 + 4 = 9$. $9 - 9 = 0$. Luego resto por $9 = 0$. Hagamos lo mismo con el sustraendo. $3 + 7 = 10$. $10 - 9 = 1$. $1 + 4 = 5$. $5 + 5 = 10$. $10 - 9 = 1$. $1 + 2 = 3$. Resto, 3.

Diferencia de restos: $0 - 3 = 7$.

(Como que el resto del minuendo es menor que el del sustraendo, le debemos añadir 10 unidades para poder verificar la substracción).

Pues bien, en este caso, el resto por 9 de la diferencia ha de ser $7 - 1 = 6$.

Si el resto del minuendo hubiera sido igual o mayor que el del substraendo, el resto de la diferencia sería igual al de la diferencia entre el del minuendo y el del substraendo.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 42689 \\ 37458 \\ \hline 5258 \end{array}$$

Resto del minuendo $= 2$.
Resto del sustraendo $= 0$.
Diferencia $= 2$.
Resto de la diferencia $= 2$.

De igual manera procederemos para hacer la prueba de la multiplicación.

Sea el producto:

$$\begin{array}{r} 59328 \\ \times\ 729 \\ \hline 43250112 \end{array}$$

Resto de 5 9 3 2 8 = 0
" " 7 2 9 = 0
Resto del producto = 0

Regla: se hallan los restos del multiplicando y multiplicador por 9. Se multiplican ambos restos y el resto de este producto ha de ser igual al resto por 9 del producto total.

Otro ejemplo: 2 6 4 9 7
× 3 5 2

9 3 2 6 9 4 4

Resto por 9 del multiplicando = 1
" " 9 del multiplicador = 1
Producto de 1 × 1 = 1.
Resto del producto = 1.

DIVISION

Sea el ejemplo siguiente:

$$\frac{4\,3\,2\,5\,0\,2\,3\,4}{7\,2\,9} = 5\,9\,3\,2\,8 \quad \text{Resto } 1\,2\,2$$

Resto del cociente por 9 = 0
" " divisor " 9 = 0
" " resto " 9 = 5

Producto de 0 × 0 = 0.
0 + el 5, que es el resto por 9 del resto, = 5.
Resto del dividendo = 5.

Regla: se halla el resto por 9 del cociente, del resto y del divisor. Se multiplica el resto del cociente por el del divisor y se añade el resto del resto. Este resto final ha de ser igual al del dividendo por el mismo 9.

Otro ejemplo: $\dfrac{9\,3\,2\,6\,9\,4\,4}{3\,5\,2} = 2\,6\,4\,9\,7$

Resto del cociente por $9 = 1$.
Resto del divisor por $9 = 1$.
Producto de $1 \times 1 = 1$.
Resto del resto $= 0$.
Resto final $= 1$.
Resto del dividendo $= 1$.

Casos particulares de la división:

Sea el caso siguiente:

$$\frac{4\,2\,3\,5\,2}{1\,4\,3}$$

Proceso: $42 : 14 = 2$.
$42 - 2 \times 14 = 14$, que con el 3 del 423, hace 143.
$143 - 2 \times 3$, (tercera cifra del dividendo) $= 137 = 9 \times 14 + (11)$.
El 9 es la segunda cifra del cociente. El 11 con el 5 del dividendo da 115.
$115 - 3 \times 9 = 88 = 6 \times 14 + (4)$.
El 6 es la tercera cifra del cociente. El 4 con 2, 42.
$42 - 3 \times 6 = 24$. Resto $= 24$.

Prueba: 1 4 3
2 9 6

4 2 3 2 8 + 24 = 42352

Qué hemos hecho:

Hemos dividido las dos primeras cifras del dividendo por las dos primeras del divisor por formar éstas un número pequeño. Hemos hallado la diferencia entre las dos primeras cifras del dividendo y el producto de la cifra del cociente y las dos primeras del divisor. A la derecha de la diferencia hemos escrito la cifra siguiente del dividendo. De este número hemos restado el producto de la cifra hallada por la siguiente del dividendo y la diferencia la hemos transformado en un múltiplo del divisor más un resto. En el caso presente, (137 lo hemos transformado en $9 \times 14 + 11$). El número que indica el múltiplo del divisor es la cifra siguiente del cociente. El resto sirve para formar el siguiente dividendo parcial escribiendo a su derecha la cifra siguiente del dividendo. Del número obtenido (aquí 115) restamos el producto de la segunda cifra del cociente por la siguiente del dividendo, y la diferencia la volvemos a convertir en un múltiplo de las dos primeras cifras del divisor y en un resto. El número indicador del múltiplo es la siguiente cifra del cociente, etc.

Otro ejemplo: 5 4 3 2 8 9
1 2 4

Proceso: $54 : 12 = 4$.
$12 \times 4 = 48$.
$54 - 48 = 6$ que con el 3, 63.
$63 - 4 \times 4 = 47 = 3 \times 12 + (11)$.

Primera cifra del cociente, 4.
Segunda cifra del cociente, 3.
11 con el 2, 112.
$112 - 3 \times 4 = 100 = 8 \times 12 + (4)$.
4 con el $8 = 48$.
$48 - 4 \times 8 = 16 = 1 \times 12 + (4)$.
4 con el 9, 49.
$49 - 1 \times 4 = 45$.
Resto, 45. Cociente $= 4381$.

Prueba: 4 3 8 1
$\times$ 1 2 4

5 4 3 2 4 4 $+$4 5 $=$ 5 4 3 2 8 9

Si quisiéramos continuar por decimales seguiríamos operando igual:

Así: el penúltimo resto era 45. $45 = 3 \times 12 + (9)$.
9 con $0 = 90$.
$90 - 3 \times 4 = 78 = 6 \times 12 + (6)$.

6 con el $0 = 60$. $60 - 6 \times 4 = 36$. Etc.

Cociente mixto: 4381'36.

OTRO CASO

Si el divisor empieza por una cifra elevada puede operarse así:

2 7 5 2 8 9 3

8 4 2

$27 : 8 = 3.$
$27 - 3 \times 8 = 3$ que con el 5, da 35.
$35 - 3 \times 4 = 23 = 2 \times 8 + (7).$
El 2 es la segunda cifra del cociente.

7 con 2, 72.
$72 - (3 \times 2 + 4 \times 2) = 58 = 6 \times 8 + (10).$

10 con el 8, da 108.
$108 - (2 \times 2 + 6 \times 4) = 80 = 9 \times 8 + (8).$

8 con el $9 = 89.$
$89 - (6 \times 2 + 4 \times 9) = 41.$
41 con el 3, 413.
$413 - 9 \times 2 = 395.$

Cociente $= 3269.$
Resto $= 395.$

Regla: igual que para el caso anterior.

CALCULO POR GRAFICAS

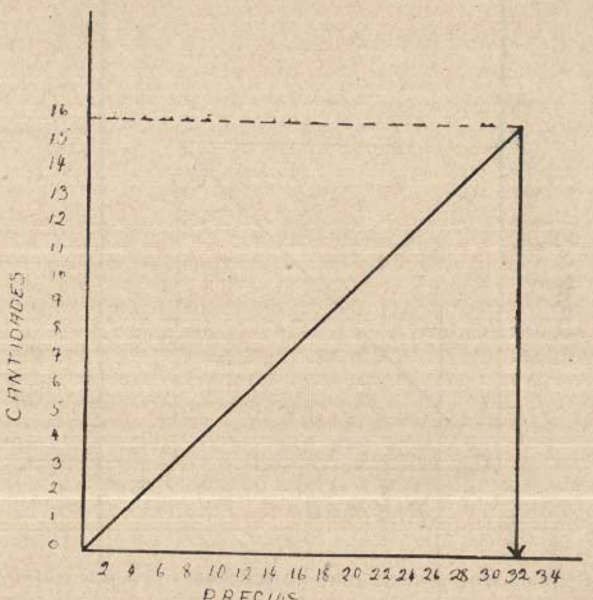
Siendo la gráfica de aplicación general, es necesario su empleo en la escuela. Mediante ella, el niño puede resolver, con suma facilidad, un buen número de problemas que, a primera vista, parecen de difícil solución y hasta imposibles

Sabido es cómo se utiliza la representación gráfica de una función lineal para resolver sistemas de ecuaciones. Conviene que el maestro acostumbre al niño a usar la gráfica, primero, como medio representativo elemental, y luego, como un medio fácil de resolver cuestiones de cálculo.

Mediante ella, el futuro calculista se percata de la verdad en matemáticas, y, por los otros métodos de resolución, puede comprobar los resultados obtenidos para así fortalecér su fe matemática.

Problema 1º

Hallar el valor de 16 docenas de pañuelos sabiendo que una vale 2 pesetas.

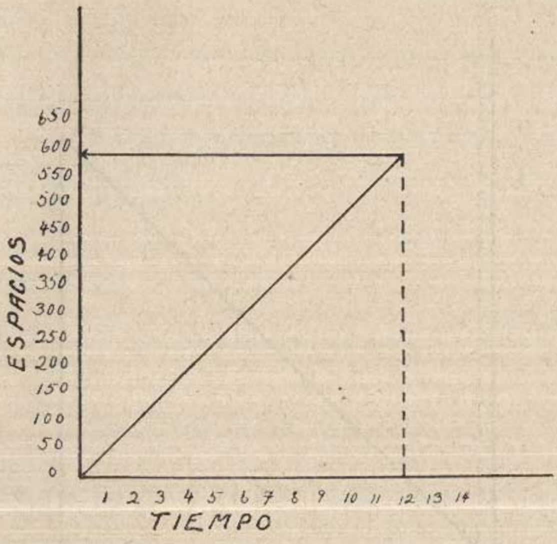


Explicación: Es indudable que si una vale 2 pesetas, 2 valdrán 4: 3 valdrán 6, etc. Haciendo pasar una diagonal por los puntos de cruce de 1-2; 2-4; 3-6, etc., que termine en el 16 y bajando la perpendicular de su extremo, el pie de ésta nos dará el número 32.

Luego: $16 \times 2 = 32$.

Problema 2º

Hallar el espacio recorrido por un tren que lleva una velocidad uniforme de 50 km. hora, en 12 horas.

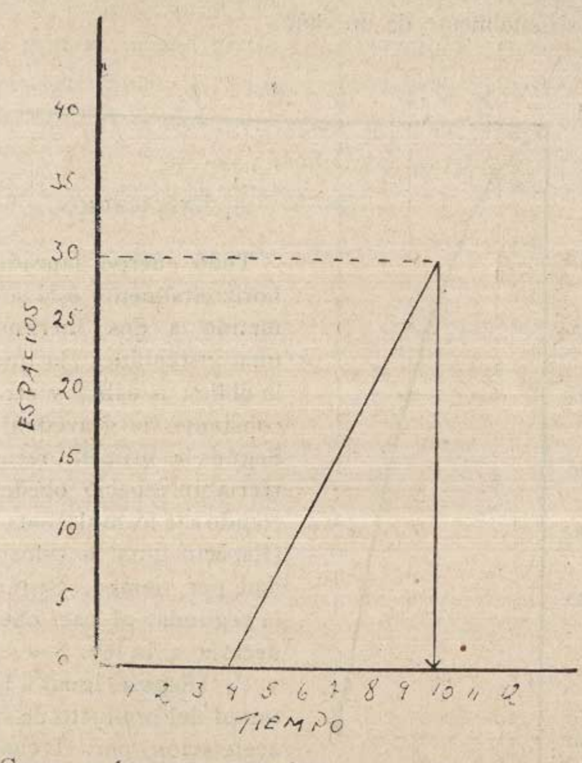


Explicación: Si en una hora recorre 50 km., en 2, 100, en 3, 150, etc. Pues bien, trazando la diagonal que pase por los puntos de intersección 1-50; 2-100, etc., hasta alcanzar la perpendicular correspondiente a las 12 horas y, trazando luego, desde su extremo la perpenducular al eje de espacios; obtendremos el número 600.

Luego, espacio recorrido en 12 horas, 600 km.

Problema 3º

Un sujeto sale de su pueblo a las 4 de la mañana y camina a razón de 5 km. por hora. Si se dirige a otro pueblo distante del suyo 30 km., ¿cuánto tiempo empleará en recorrer esta distancia?.

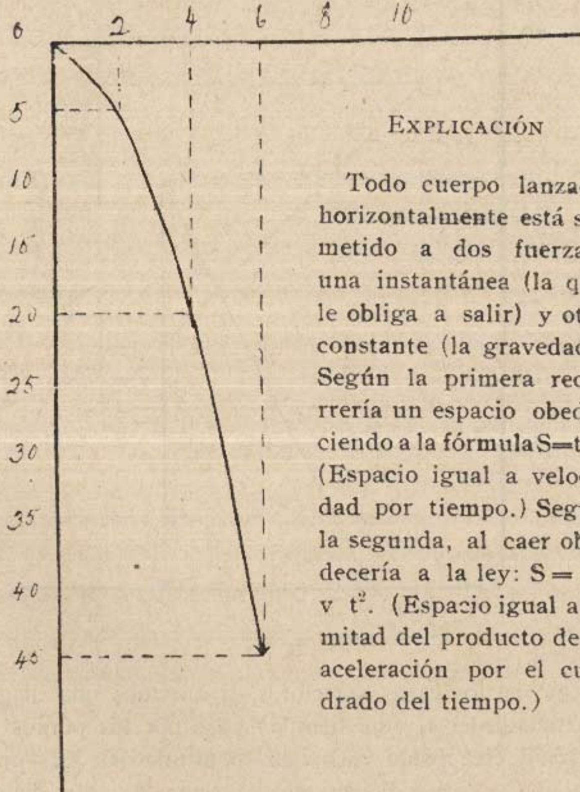


Como en los casos anteriores, trazaremos una diagonal que partiendo del 4, (eje tiempo) pase por los puntos 5-5; 10-6; 15-7; etc., hasta encontrar la altura del 30, (eje de espacios). La perpendicular del extremo de esta diagonal nos dará el número 10. Luego, llegará al pueblo a las 10 de la mañana.

Problema 4º

EL AGUA QUE CAE

Trazar el camino recorrido por un chorro de agua que sale horizontalmente de un caño.



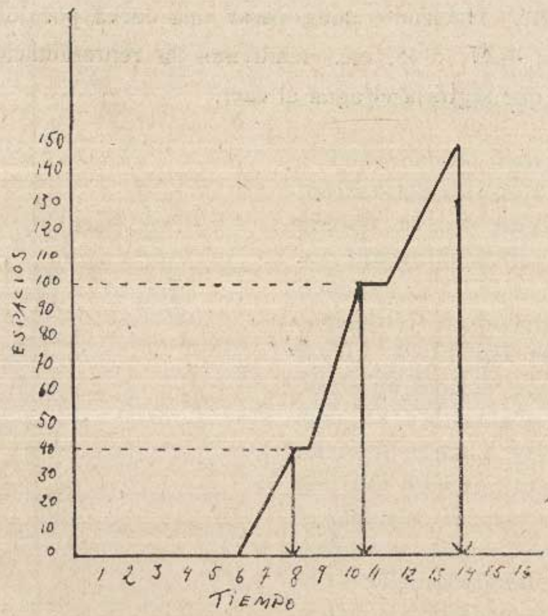
EXPLICACIÓN

Todo cuerpo lanzado horizontalmente está sometido a dos fuerzas: una instantánea (la que le obliga a salir) y otra constante (la gravedad). Según la primera recorrería un espacio obedeciendo a la fórmula S=t v. (Espacio igual a velocidad por tiempo.) Según la segunda, al caer obedecería a la ley: S = ½ v t². (Espacio igual a la mitad del producto de la aceleración por el cuadrado del tiempo.)

La aceleración vale, aproximadamente, 9'81. Para operar mejor la consideraremos igual a 10 y, por lo tanto, su mitad igual a 5. Veamos cómo conseguimos la gráfica. Al salir, si la velocidad fuera 2, en el primer instante, mejor dicho, en la primera unidad de tiempo recorrería horizontalmente 2; en 2, 4; en 3, 6; etc. Cayendo el agua libremente, en la primera unidad de tiempo recorrería 5; en la segunda 20, es decir, mitad de 10 por el cuadrado de 2. Igual a $5 \times 4 = 20$ etc. Haciendo, pues, pasar una curva por los puntos 2-5; 4-20; 5-45, etc., tendremos la representación del camino que seguiría el agua al caer.

Problema 5º

Un ciclista sale de Figueras para Barcelona, habiendo entre ambas ciudades unos 150 km. Hace 20 km. por hora y sale a las 6 de la mañana. A las 8, descansa media hora y entonces sale a razón de 30 km. Al cabo de otras 2 horas vuelve a descansar 1 hora y sale a la velocidad constante de 20 km. Se pregunta: ¿En qué puntos del trayecto ha descansado? ¿A qué hora llega a Barcelona?

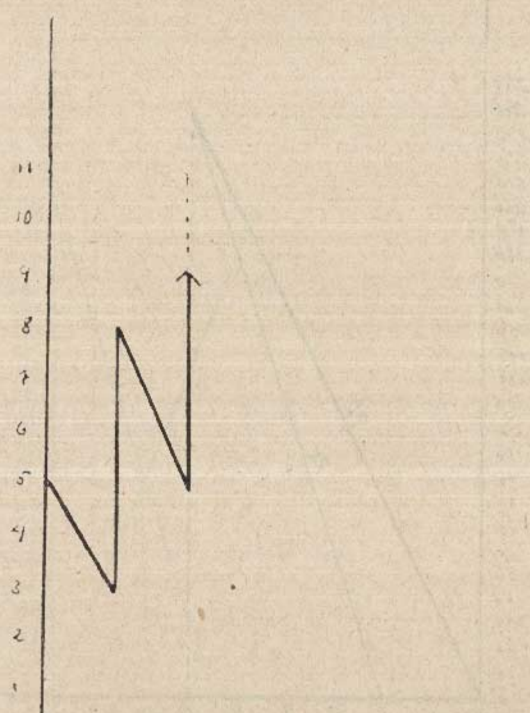


Resultados: 1º, el primer descanso a los 40 km. Sale de nuevo a las 8 y media. El segundo descanso a los 100 km. Vuelve a salir a las 11 y media y llega a Barcelona a las 2 de la tarde.

Problema 6º

PROBLEMA DEL CARACOL

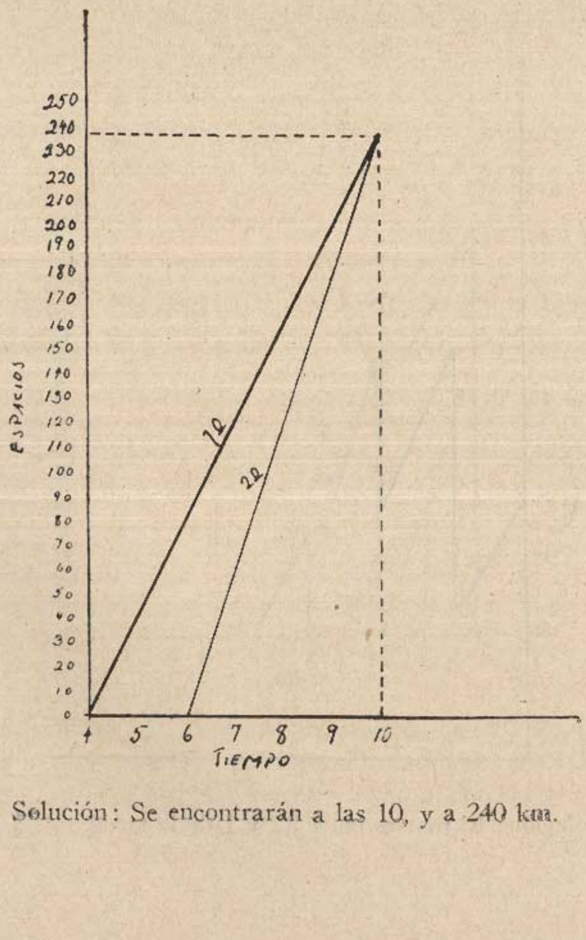
Un caracol empieza a subir a un árbol a las 6 de la mañana de un domingo. Durante el día asciende 5 metros; pero baja 2 metros durante la noche. ¿Cuándo estará a 9 metros de altura?



Solución: El martes entre 12 y 1 de la tarde.

Problema 7º

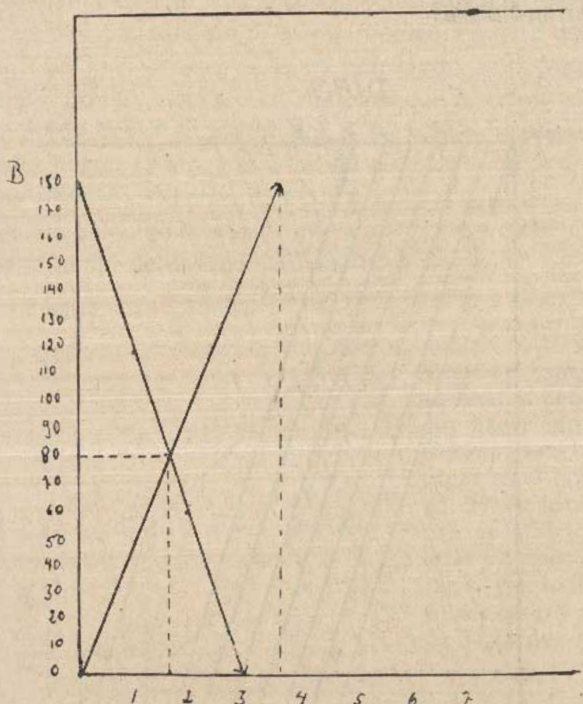
Un tren sale de una ciudad a las 4 de la mañana con una velocidad de 40 km. por hora, y 2 horas más tarde sale otro tren a la velocidad de 60 km. ¿En dónde y a qué hora el segundo encontrará al primero?



Solución: Se encontrarán a las 10, y a 240 km.

Problema 8º

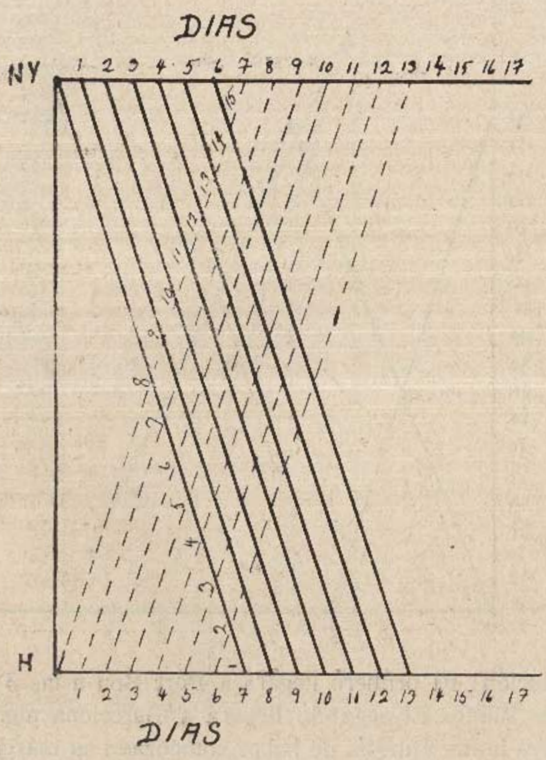
Un tren sale de Barcelona cuando sale otro de Port Bou. Si la distancia que separa ambas ciudades es de 180 km. aproximadamente y la velocidad del primero es de 60 km. por hora y la del segundo es de 50. Se pregunta: ¿En dónde y cuándo se encontrarán? ¿A qué hora llegarán a su destino?



Solución: El primero llegará a Port Bou a las 3 horas de haber salido. El segundo llegará a Barcelona algo más de las tres horas y media de haber comenzado su marcha. Se encontrarán ambos a unos 81 km. de Port Bou y algo más de una hora y media de haber salido.

Problema 9º

Si suponemos que del Havre y de Nueva York, sale cada medio día, un vapor de una compañía y que emplea en el trayecto siete días, preguntamos: ¿cuántos vapores de su compañía encontrará en el viaje el vapor que salga del Havre hoy al medio día?

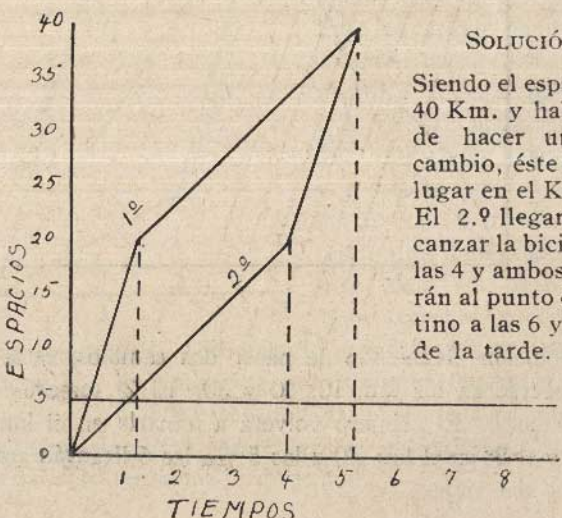


Solución: Encontrará 7 en la primera mitad del viaje y 6 en la otra mitad, además, el que llega cuando él sale y el que sale cuando él llega. Total, 15.

Problema 10

UNA BICICLETA PARA DOS CICLISTAS

Dos amigos van de una ciudad a otra, distantes 40 km. No teniendo más que una bicicleta, convienen en hacer lo siguiente: los dos partirán al mismo tiempo a las 12 del día, el uno a pie y el otro en bicicleta. En cierto sitio dejará la bicicleta el que va montado en ella para que la recoja el otro y monte en ella, y él continuará a pie. Si suponemos que montados hagan 15 km. por hora y a pie sólo 5, se pregunta: ¿A qué distancia deberán dejar la bicicleta, suponiendo que se haga un solo cambio, para que los dos lleguen al mismo tiempo al punto de destino. ¿A qué hora llegarán?

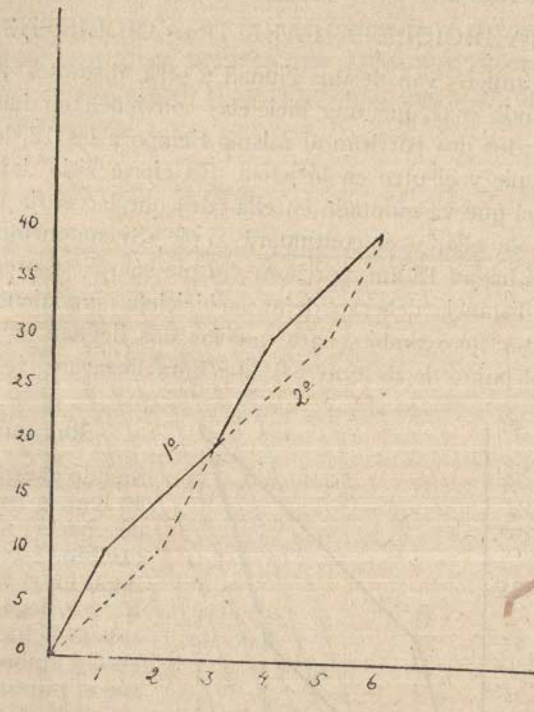


SOLUCIÓN

Siendo el espacio de 40 Km. y habiendo de hacer un sólo cambio, éste tendrá lugar en el Km. 20. El 2.º llegará a alcanzar la bicicleta a las 4 y ambos llegarán al punto de destino a las 6 y media de la tarde.

Problema 11

El mismo, pero habiendo de hacer dos cambios.

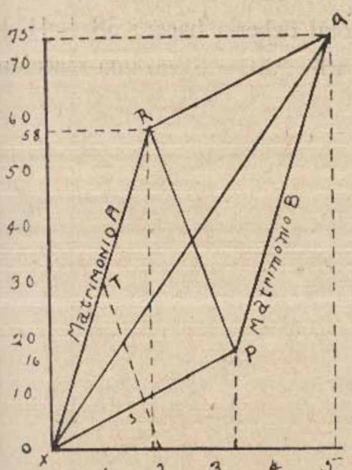


Solución: Habiendo de hacer dos cambios, éstos deberán hacerse en los km. 10, 20 y 30. El 2º tomará la bicicleta a las 2. El primero volverá a tomarla en el km. 20 a las 3, y el 2º en el km. 30 a las 5 y a las 6 llegarán ambos al término del viaje.

Problema 12

Dos matrimonios, A y B, tienen que trasladarse de una población a otra, distantes ambas 75 km.; pero no disponen de otro medio que de un automóvil para dos plazas y, en vista de ello, convienen en hacer lo siguiente: el matrimonio A saldrá en auto y el B a pie. A cierta distancia el auto dejará al matrimonio A, el cual continuará a pie, e irá a buscar al B y lo llevará o su destino. ¿Cómo deben hacerlo para que ambos lleguen al mismo tiempo al punto de destino? (La velocidad del auto es de 30 km. y la de los peatones de 5 km.)

Solución



Como en los dos anteriores, la gráfica será nn paralelogramo, ya que los trayectos han de ser iguales. Para hallarlo haremos lo siguiente: trazaremos la trayectoria del matrimonio A y la del B. Hallaremos la del retroceso suponiendo que éste se haga al llegar a los 30 Km. correspondientes a una hora, empleando otra hora en retroceder. Esta trayectoria cortará a la X en el punto S. Hallemos la mitad de ST y unamos la mitad con X y prolonguemos esta diagonal hasta la altura de la división 75. Por este punto tracemos una paralela a la X P y completando el paralelogramo obtendremos la X P de la cual sólo teníamos la dirección.

Resumen: El matrimonio A irá en auto hasta el km. 58, empleando en ello unas 2 horas. Luego irá a pie mientras el auto retrocede en busca del B, durando la caminata unas 3.40 horas, porque 58 km. $+ 5 \times 3.40 = 75$ km.

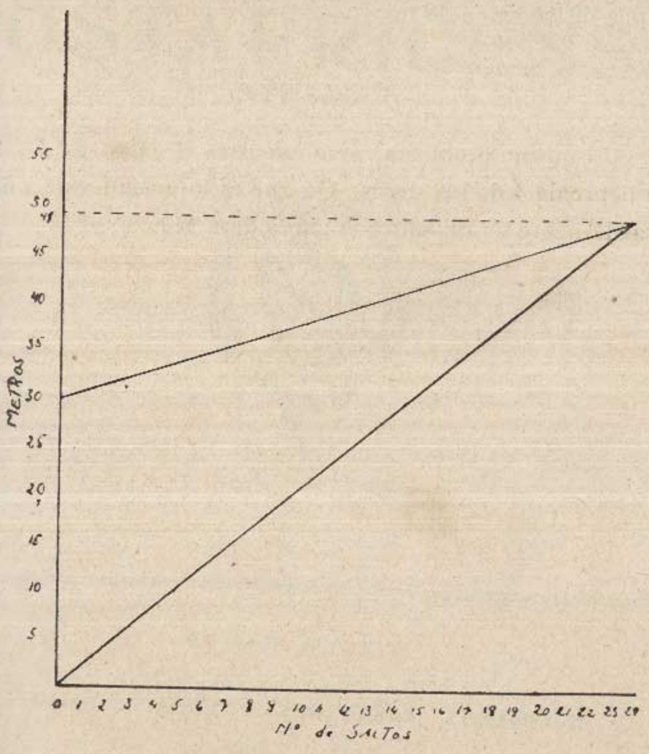
El matrimonio B irá a pie hasta el km. 17, unas 3.40 horas. Luego iría en auto hasta el 75, empleando

$$\frac{75 - 17}{30} = 1.80$$

aproximadamente, que con las 3 y algo más harían las 5 horas y algo más. El auto en total debería hacer: $58 + 41 + 58 = 157$ km., con un tiempo $157 : 30 = 5$ con una fracción.

Problema 13

Un galgo persigue una liebre que se halla a 30 metros de distancia. Mientras el galgo da saltos de 2 m., la liebre de 0.75. ¿Cuántos saltos habrán de dar para alcanzarse?



Solución:

1 salto del galgo es igual a 2 m.
3 saltos del galgo es igual a 6 m.
y los 4 de la liebre igual a 3 m.

El galgo encontrará a la liebre al verificar el 24 salto y a una distancia de 48 m.

VARIANTE

El mismo problema; pero mientras el galgo da 3 saltos la liebre da 4 de los suyos, (lo que es lo mismo que mientras la liebre da un salto, el galgo dará ¾).